Τυπολόγιο

14/03/2019
3η διάλεξη

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \geq 1 + x$

2) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

3) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i$

4) $n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right) \leq n^n$

5) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

6) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

7) $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

8) $|x| < 1 : \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

9) $\binom{n}{k} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k$

10) $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$

11) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

για $x = y = 1$ $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Άσκηση 1

Παράδειγμα: Πόσος χρόνος απαιτείται ανά εντολή και ποιος ο συνολικός χρόνος;

z=0; → $C_1 \cdot 1$ Έπειτα θα μετατρέψουμε το πρόγραμμα

for (i=0; i<n; i++) → $C_2 \cdot n$ σε χρόνο ($\underbrace{0 \le i < n}_{n \text{ στοιχεία}}$ δηλ $i \le n-1$)

{

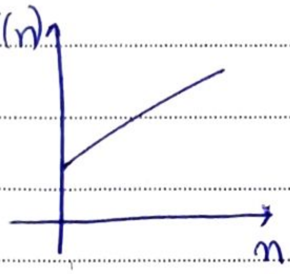
t = x[i]+y[i]; → $C_3 \cdot n$ } είμαστε Οι άλλες πράξεις είναι μονάδα

z = z+t; → $C_4 \cdot n$ } μέσα στη for.

}

Άρα, $T(n) = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n + C_4 \cdot n = n(\underbrace{C_2 + C_3 + C_4}_{C}) + C_1 = n \cdot C + C_1$

Επομένως, ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος είναι γραμμικός.



$n \in [\ ,\ ]$ ← θα μας το δίνει στην εκφώνηση

Άσκηση 2

int count=0; → C_1

for (int i=0; i<n; i++) → $C_2 \cdot n$

for (int j=i+1; j<n; j++) → $C_3 \sum_{j=1}^{n-1} j = (n-1)+(n-2)+\ldots+1$

for (int k=j+1; k<n; k++) → $C_4 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=2}^{n-1} k \right)$

if (a[i]+a[j]+a[k]==0)

count++;

χρόνος για τη for

$$T(n) = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \sum_{j=1}^{n-1} j + C_4 \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{k=2}^{n-1} k \right) = C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \frac{n(n-1)}{2} + C_4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$= C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \frac{n(n-1)}{2} + C_4 \frac{(n-1)(n-2)}{2} (n-1) = an^3 + cn + d$$ κυβικός

A_1	$1000n$	$1 \le n \le 9$	A_4	δεν πιστεύω κάτι τέτοιο.
A_2	$200n\log n$	$10 \le n \le 100$	A_3	
A_3	$10n^2$	$n \geq 100$	A_1	
A_4	2^n			

Η συνάρτηση $T(n)$ είναι $O(f(n))$, αν $\exists$ σταθερά $c>0$ και $n_0 \geq 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $T(n) \le cf(n)$

$T(n) = 37n^2 + 19n + 72 \le cn^2$ Τι Ο είναι;

$T(n) \le cn^2 \Rightarrow T(n) = O(n^2)$ ← το καλύτερο Ο

$T(n) = O(n^3)$

$T(n) \neq O(n)$

Ο τρόπος να λύνω τέτοιες ασκήσεις

Έστω ότι για τις συναρτήσεις $T(n)$ και $f(n)$ υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)}$ και έχει την τιμή $\le c$ για κάποια c. Τότε $T(n) = O(f(n))$

<u>π.χ.</u> $T(n) = 37n^2 + 19n + 72$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{37n^2+19n+72}{n^2} = 37$$

Άρα, $T(n) = O(n^2)$

$T(n) = 3n^3 + 8n^4 + 2$ $\quad T(n) = O(n^4)$ γιατί $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^4} = 8$

Απόδειξη: Γιατί όταν έχουμε πολυώνυμο το O είναι η μεγαλύτερη δύναμη.

$\max\{p,q,k\} = p$

A $\quad T(n) = pn^2 + qn + k \longrightarrow O(n^2)$

$pn^2 \le pn^2$

$qn \le qn^2$

$k \le kn^2$

$$T(n) = pn^2 + qn + k \le pn^2 + qn^2 + kn^2 = n^2 \underbrace{(p+q+k)}_{c}$$

$\Rightarrow T(n) \le c \cdot n^2$

άρα $T(n) = O(n^2)$

Άσκηση: Δείξτε ότι $2n^3 + 100n^2 + n = O(n^3)$

Αρκεί, να βρούμε θετική σταθερά c και $n_0 > 0$ έτσι ώστε $\forall n \ge n_0$

$2n^3 + 100n^2 + n \le cn^3$

$\max\{2, 100, 1\} = 100$

$2n^3 \le 2n^3$

$100n^2 \le 100n^3$

$n \le n^3$

Άρα, $T(n) = 2n^3 + 100n^2 + n \le 2n^3 + 100n^3 + n^3 = n^3 \underbrace{(2+100+1)}_{c=103} = n^3 \cdot 103$

$n_0 = 1$

$\Rightarrow T(n) \le 103 \cdot n^3$

άρα, $T(n) = O(n^3)$